Berliner MNU - Kongress 2010

Vortrag von Christine Meyer,

gehalten am 24.09.2010

Analysis im Grundkurs und in 10

Differential- und Integralrechnung

„ohne“ Grenzwerte

Vorwort

Es folgt kein Nachweis für die mathematische Korrektheit des Verzichts auf die Behandlung von Grenzwerten im Grundkurs.

Vielmehr wird ein Vorschlag unterbreitet, wie unter den gegebenen Bedingungen verfahren werden könnte. Die dadurch entstehenden Schwachstellen werden auch schnell sichtbar.

Deshalb wird vorgeschlagen, Grenzwertbegriff und Unendlichkeit ausführlicher bei der Behandlung der Exponentialfunktionen zu diskutieren. In diesem Fall wäre der Begriff des unendlich Kleinen wohl ganz gut auf die Größe eines Punktes zu beziehen.

Hinweis

Diese Darstellung umreißt nur grob
die Inhalte zweier Semester.

Der Inhalt soll Information für interessierte
Lehrer sein und ist nicht methodisch
aufgearbeitet.

Inhalt

- Zielstellung
- Änderungsraten untersuchen
- Ableitungen gewinnen
- Ableitungsregeln entwickeln
- Transzendente Funktionen bearbeiten
- Änderungsraten aufaddieren
- Hauptsatz finden
- Definitionsversuche

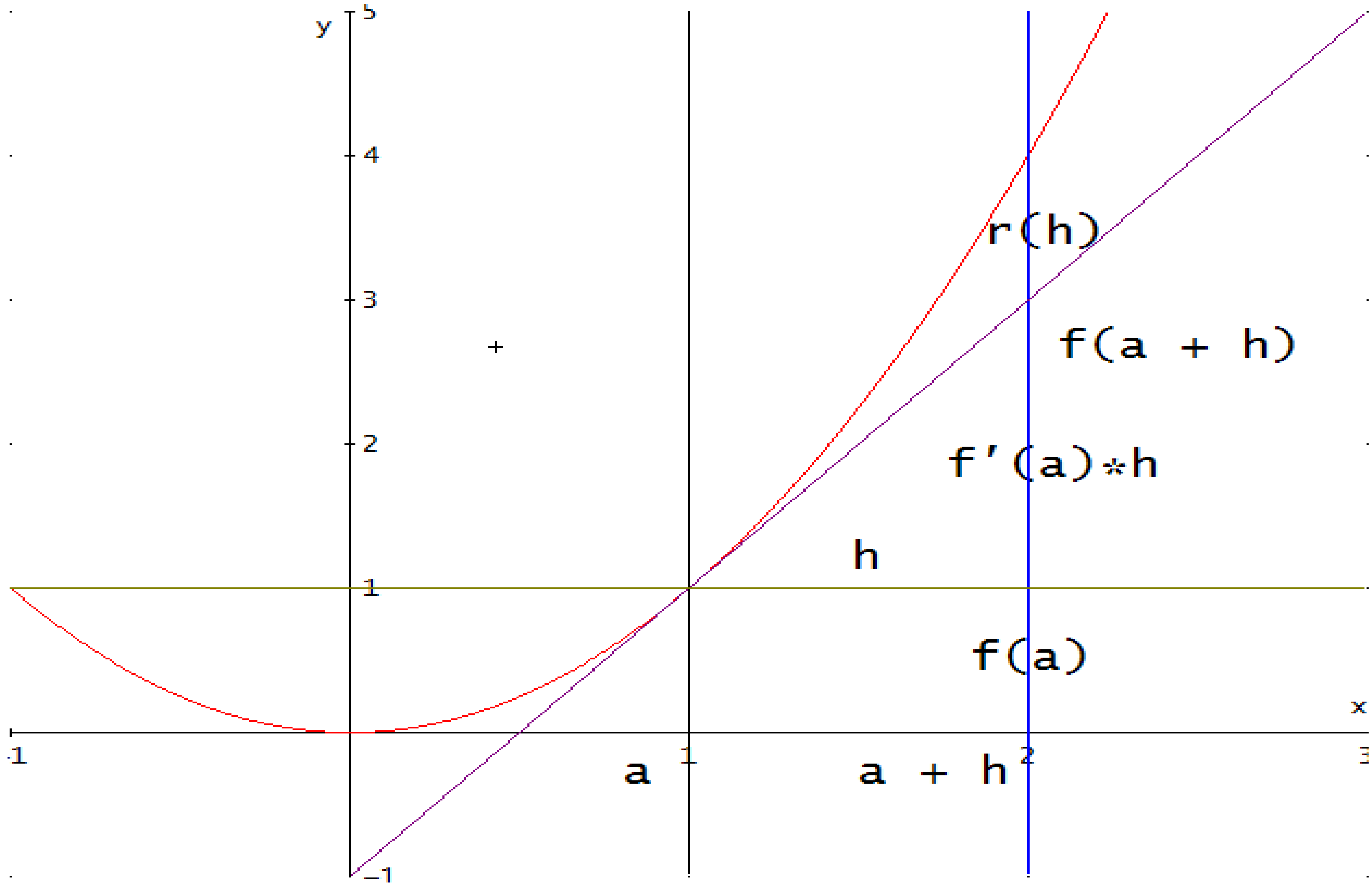
Zielstellung

- Umgang mit Differentialquotient kann Möglichkeiten der propädeutischen Grenzwertbehandlung nicht übersteigen
- Deshalb Bezug auf Differenzenquotient für sehr kleines Intervall; also approximatives Vorgehen
- Grundkurswissen der DR und IR kann so größtenteils gewonnen werden
- Schwerpunkt auf Kompetenzentwicklung lt. RLP, nicht auf vollständiger Abwicklung aller mathematischen Zusammenhänge

Änderungsraten untersuchen, z.B.:

- **Suche nach der Momentangeschwindigkeit**
- **Linearisierung von Graphen**
- **Gerade als Näherung für Umgebungen von Stellen nichtgerader Graphen**
- **Vergleich von mittleren Är und gemessenen Tangentensteigungen mit den korrekten Werten aus der Physik**
- **Aus Geradensteigungen mittlere Är und Är gewinnen**
- **Differentialquotient und Ableitung, numerische Übungen**

Steigung mit $f(a + h) = f(a) + f'(a)*h + r(h)$



Ableitungen gewinnen

Wir lesen direkt aus der Zeichnung ab:

$$f(a + h) = f'(a)*h + f(a) + r(h) \qquad \text{oder}$$

$$f(a + h) \approx f'(a) * h + f(a)$$

Für $h \to 0$ geht $r(h)$ gegen Null (Stetigkeit).

Die Ableitung erscheint als Koeffizient im linearen Glied von $f(a + h)$ und nur diese suchen wir.

Hinweis:

Für h gegen Null geht $r(h)/h$

auch gegen Null (Differenzierbarkeit).

Damit könnte sich der LK befassen!

Ableitung von x^2 in $x = a$

$$(a + h)^2 = a^2 + 2ah + h^2$$

- Lineares Glied: $f'(a)h = 2ah$
- Ableitung: $f'(a) = 2a$

  für $f(x) = x^2$ an der Stelle $x = a$
- Restglied: $r(h) = h^2$

Ableitung von x^3 in $x = a$

$$(a + h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$$

- Lineares Glied: $f'(a)h = 3a^2h$
- Ableitung: $f'(a) = 3a^2$

  für $f(x) = x^3$ an $x = a$
- Restglied: $r(h) = h^3 + 3ah^2$

Ableitungsregeln finden

$f(x) = C$ und $f(x) = x$ sind unmittelbar

einsichtig (plausibel) zu machen.

Summenregel

$k(a + h) = f(a + h) + g(a + h) =$

$$f(a) + g(a) + f'(a)h + g'(a)h + r(h)$$

Lineares Glied: $k'(a)h = (f'(a) + g'(a))h$

Ableitung: $k'(a) = f'(a) + g'(a)$

Ableitung von Potenzfunktionen

$$(x+a)^n = x^n + nx^{n-1}a + \ldots + nxa^{n-1} + a^n$$

- Lineares Glied: $f'(a)x = na^{n-1}x$
- Ableitung: $f'(a) = na^{n-1}$

Kettenregel

$$f(g(a + h)) = f(g(a) + g'(a)h)$$

Verkettung:

$f(g(a + h)) = f(g(a) + k)$ mit $k = g'(a)h$ und

$f(g(a) + k) = f(g(a)) + f\,'(g(a))*k$, also

$f(g(a + h)) = f(g(a)) + f\,'(g(a)) * g'(a)h$

Lineares Glied: $f\,'(g(a))*g'(a)h$

Ableitung: $(f(g(a)))' = f\,'(g(a))*g'(a)$

Quotientenregel

(nicht im RLP)

- Aus $f = u/v$ folgt $u = v*f$ und lt. Produktregel:
- $u' = v'f + vf'$
- Umformen:

$$f' = (u' - v'f)/v$$

- Erweitern :

$$f' = (u'v - uv') / v^2$$

Transzendente Funktionen

Winkelfunktionen grafisch differenzieren

Exponentialfunktionen werden, wie bisher üblich, über den Differentialkoeffizienten durch Approximation abgeleitet. Grenzwertsätze werden nicht benötigt. Hier sollte der propädeutische Grenzwertbegriff zu seinem recht kommen.

Problemfrage

Wie ist im RLP eigentlich die Aussage:

... inhaltlich- anschauliche Erklärungen...

gemeint?

Im Extremfall heißt das wohl:

Ablesen der Stelle aus Tabelle oder Graph und korrekte Berechnung mit f' !?

Integralrechnung als Umkehrung der Differentialrechnung

Genähert gilt:

$$f(a + h) = f(a) + f\,'(a) * h$$

Daraus folgt:

$$f(a + h) - f(a) = f\,'(a) * h$$

oder

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x$$

Aufaddieren von Änderungsraten

Aus dem aus Differenzen bestehenden Quotienten werden durch Multiplikation mit dem vorherigen Nenner die Differenzen zurückgewonnen.

Dadurch können die Änderungen der Funktionswerte aus den Änderungsraten gewonnen und aufaddiert werden.

Mit einem Anfangswert gewinnen wir die Funktionswerte wieder zurück mit:

$$f(a + h) \approx f'(a) * h + f(a)$$

Hauptsatz

Der Hauptsatz steckt im Differentialquotienten:

$$f'(a) \approx (f(a+h) - f(a)) / h$$

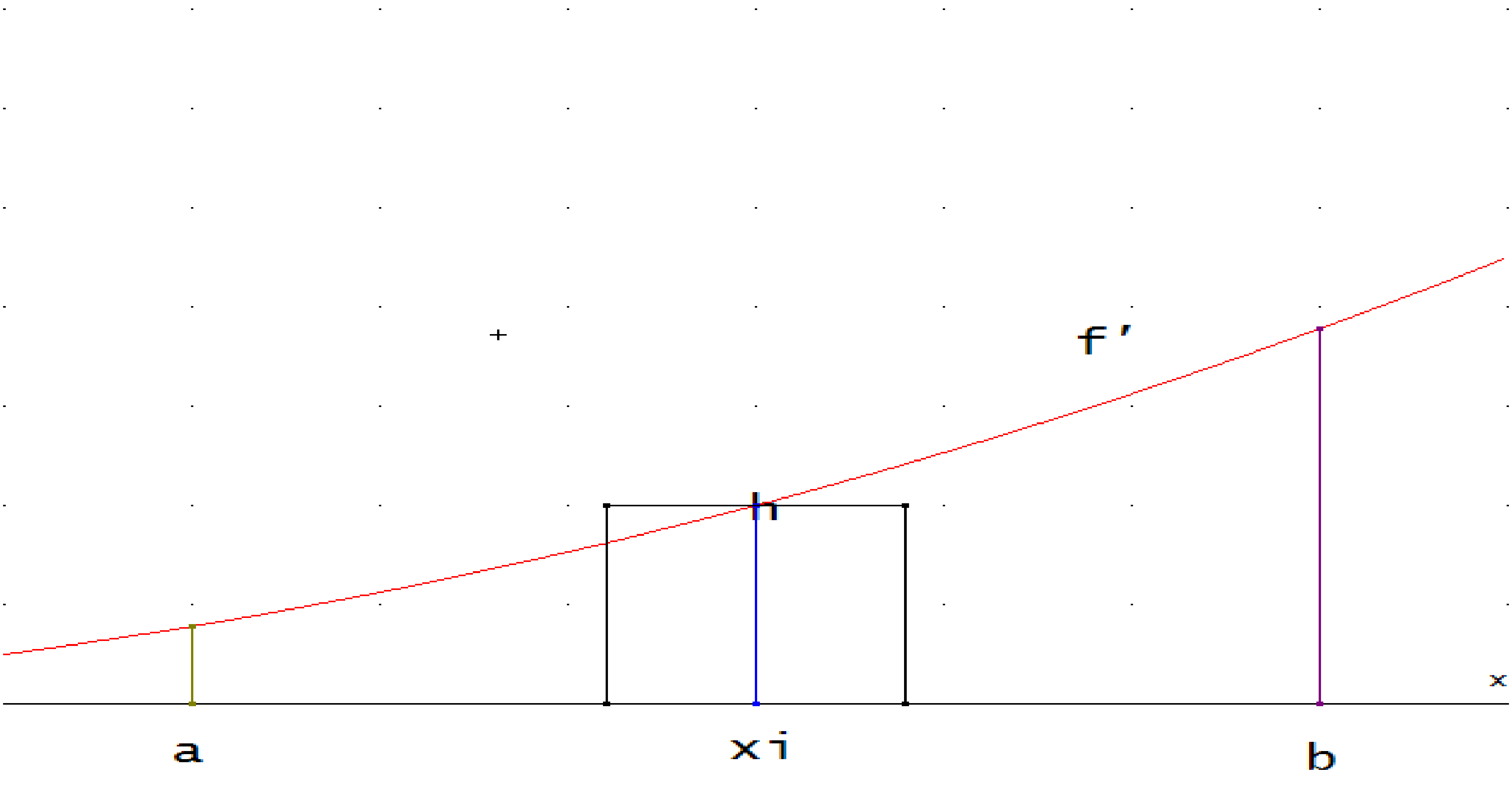
und

$$f(a+h) - f(a) \approx f'(a) * h$$

ergibt

$$f(x1) - f(x0) \approx f'(x0) * \triangle x \qquad \text{usw.}$$

Wir betrachten die zu integrierende Funktion als Ableitungsfunktion.



Integral durch Aufaddieren:

$$\sum(f(x(i+1)) - f(xi), i, 0, n - 1) \approx \sum(f\,'\,(xi) \triangle x, i, 0, n - 1)$$

(oder i von 1 bis n)

Heißt

$$\approx [f(x1) - f(x0)] + [f(x2) - f(x1)] +$$

$$[f(x3) - f(x2)] + \ldots + f(xn) - f(x(n-1))$$

und

$$\approx f(xn) - f(x0) = f(b) - f(a)$$

Integralzeichen für Summe aus *un*endlich*

kleinen Funktionswerten:

$$F\ (b) - f(a) = \int(f\ '\ (x),x,a,b)$$

oder

$$F(b) - F(a) = \int(f\ (x),x,a,b)$$

* Hier fehlt der Grenzwert echt! Es gibt die Möglichkeit, diese Probleme durch die Einführung hyperreeller Zahlen zu umgehen.

Integral als Fläche

$\int(f(x),x,a,b) \approx \sum(f'(xi) * \triangle x, i, 0, n-1)$

zeigt die Summe *un*endlich kleiner

Flächeneinheiten der Breite $\triangle x$ und damit

die Gesamtfläche unter dem Graphen

... im Intervall....

Integral als Wirkung

Geht hervor aus:

$$F(b) = F(a) + \int(f(x),x,a,b)$$

Da $\int(f(x),x,a,b)$ die Summe aller Änderungen Δy darstellt, ergibt dessen Summe mit dem Anfangswert $F(a)$ die Wirkungsfunktion.

Regeln

Die für den Grundkurs notwendigen Regeln

können unmittelbar durch die Umkehroperation

plausibel gemacht werden.

Ergebnis

- **Grenzwertsätze werden nicht benötigt**
- **RLP kann auf verschiedenem Niveau genügt werden, da Vertiefungen an allen Positionen möglich sind**
- **Begriffsbildungen, Übungen und sonstige Einbettungen fehlen hier**

Definitionsversuche

<u>Tangente</u>

Diejenige Gerade im Punkt P eines Graphen, die

die Steigung des Graphen in diesem Punkt besitzt.

Oder:

Die Gerade im Punkt eines Graphen, die sich in der Nähe dieses Punktes optimal an den Kurvenverlauf anpasst.

Leistungskurs:

Eine Gerade $g(x) = m(x - a) + f(a)$

heißt Tangente

von $f(x)$ an der Stelle a,

wenn für $r(h)$ in der Darstellung

$$f(a + h) = f(a) + m*h + r(h)$$

$r(h) / h$ gegen Null geht.

<u>Ableitung</u>

Als Tangentensteigung...

und

Unter der Ableitung einer Funktion versteht man

diejenige Funktion, die jedem x-Wert die dortige

Tangentensteigung zuordnet.

<u>Integral</u>

Wird durch den Hauptsatz definiert.

Propädeutischer Grenzwertbegriff

Grenzwert einer Funktion an der Stelle a

ist diejenige Zahl g,

der sich die Funktionswerte bei

beidseitiger Annäherung der

x-Werte an die Stelle a annähern.

Literatur

W. Kroll, J. Vaupel
Grund- und Leistungskurs
Analysis
Lehr- und Arbeitsbuch
Band 1: Differentialrechnung
Band 2: Integralrechnung
Dümmler- Verlag Bonn
1986/88